# תרגיל

יהי טור כלשהו ונגדיר את הטורים באופן הבא:

1. נניח ש הוכח ש ⬄ ⬄

## תשובה

נסמן ב את סדרות הסכומים החלקיים. צ"ל ⬄ ⬄

מתקיים , . כלומר הינו תת הסדרה של האיברים הזוגיים של , ו הם האי זוגיים. . נתון לכן ולכן לפי אריתמטיקה של גבולות ⬄ . אם אזי

### סיכום ביניים

1. אם אזי כי הן תת סדרות
2. ⬄

נותר להוכיח שאם אזי . אבל כפי שראינו בתרגילים קודים, הגבול החלקי היחיד של במקרה זה הינו L, ולכן הוא מתכנס לL(כי תת סדרת הזוגיים שלו מתכנסת לL וגם תת סדרת האי זוגיים)

*2. נניח ש ו מתכנסים לאותו גבול L. הוכח ש גם מתכנס לL*

## פתרון

אבל הוכחנו הרגע את זה ללא שימוש בנתון

3. תן דוגמה נגדית ל(א') אם לא נתון

## תשובה

ניקח שאינו מתכנס. .

# שאלה

נניח טור מתכנס. אם נשנה את סדר האיברים שלו האם בהכרח הוא יתכנס? והאם לאותו סכום?

## תשובה

ממש לא. נסתכל על (מתכנס לפי לייבניץ). נשנה את סדר האיברים כך שהטור יתבדר:  
ידוע ש => . לכן . לכן בפרט, קיים כך ש ניקח את ונשים אותם ראשונים בטור. אחריהם נשים את . הסכום עד עכשיו יהיה גדול מ1. עכשיו נסתכל על . לכן קיים כך ש. נשים את האיברים . עכשיו אחריהם נשים את . הסכום עד עכשיו גדול מ2. באופן כללי השלב ה הסכום החלקי יהיה גדול מk, וסה"כ סדרת הסכומים החלקיים תתבדר.

*נניח היינו רוצים לשנות את סדר האיברים כך שהטור יתכנס למספר .*

* *ניקח את כל הזוגיים הראשונים(חיוביים) עד אשר נעבור את M*
* *ניקח את כל האי זוגיים(שליליים) עד שנעבור את M מהצד השני*
* *כך נמשיך ונקבל טור שמתכנס לM.*

*נקבל טור שמתכנס לM כי האיברים שואפים לאפס.*

*האם זה נכון לכל טור? לא!*

# הגדרה

טור נקרא מתכנס בהחלט *אם הטור מתכנס.*

# הגדרה

אם הטור מתכנס אבל לא בהחלט אזי אומרים שהטור מתכנס בתנאי.

# תרגיל

הוכח שכל טור מתכנס בהחלט מתכנס.

## הסבר

מתכנס. נסמן את סכום האיברים החיוביים של ב. ברור ש(לא מדויק – צריך לרפד באפסים). לכן לפי מבחן ההשוואה מתכנס. נסמן את סכום השליליים ב אזי ולכן הוא מתכנס. ולכן => מתכנס.

# משפט

אם מתכנס בהחלט אזי שינוי סדר האיברים לא ישנה את התכנסות הטור או את סכומו.

# משפט

אם מתכנס בתנאי אזי לכל מספר M ניתן לסדר את איברי הטור כך ש*הוא יתכנס לM, כולל*

# תרגיל

הוכח שהטור מתכנס.

## פתרון

. הראנו ש מתכנס בהחלט ולכן הוא מתכנס.

# תרגיל שזלצמן אוהב לתת

האם מתכנס?

1. דבר ראשון בודקים התכנסות בהחלט. אם עובד סיימנו, אם לא ממשיכים
2. בודקים האם . אם לא הטור מתבדר לחלוטין.
3. ממשיכים ומקווים לטוב(מנסים לייבניץ)

# תרגיל

יהי מתכנס בתנאי. הוכח שטור האיברים החיוביים וטור השליליים

## פתרון

יהי טור המתקבל מ ע"י איפוס כל האיברים השליליים. כלומר . ונגדיר באופן דומה את להיות אחרי שאיפסנו את האיברים החיוביים והפכנו את הסימן של השליליים: . קודם כל ברור ש. נשים לב גם ש. נניח ש מתכנסים, אזי מתכנס בסתירה. לכן לפחות אחד מבין מתבדר, מכיוון שאלו טורים חיוביים הוא שואף לאינסוף. נניח שרק מתכנס אבל מתבדר. לכן – סתירה. באופן דומה אם מתכנס נגיע לסתירה ולכן בהכרח .

*=> סכום השליליים*

### למה

אם טור חיובי שמתכנס ו טור המתקבל על ידי הוספת מספר סופי של אפסים בין כל שני אברי , אזי

### מסקנה

סכום טור החיוביים וסכום טור השליליים, וסיימנו.

# תרגיל

לאילו ערכי x הטור מתכנס בהחלט, בתנאי, או מתבדר: ?

## פתרון

רוצים לעשות את מבחן השורש של קושי, אבל מותר רק כאשר :

במקרים אלה נפעיל את מבחן קושי. נקבל: אזי אם הטור מתבדר ואילו אם הטור מתכנס בהחלט.  
כאשר אז . => עבור בסה"כ הטור מתבדר.

כאשר אז כלומר , אבל כאשר . ביחד הטור מתבדר עבור

סה"כ עבור הטור מתכנס בהחלט.

### סיכום ביניים

מתבדר  
 מתכנס בהחלט  
 מתבדר

אם => .

### משפט

נבדוק מתי בתחום הזה. נקבל , כאשר . לכן עבור מתכנס ולכן הטור מתכנס בהחלט.

=> ולכן הטור מתבדר. נותר לבדוק את נקודות הביניים.